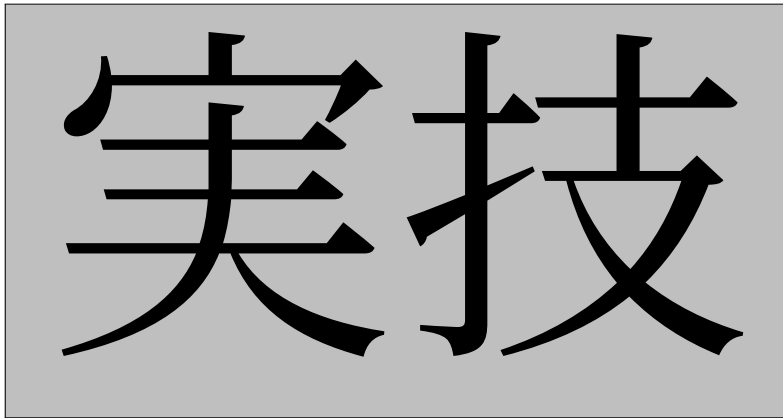


第3回日本天文学オリンピック

本選問題

令和6年2月23日 16時15分—17時45分



注意事項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 問題冊子は全部で16ページあります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆または黒色シャープペンシルを使用しなさい。
- 4 解答用紙の指定欄に受験番号を記入しなさい。また、指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 5 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、草稿用にしてもよいが、問題冊子は破いてはいけません。
- 8 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
- 9 試験終了後、問題冊子・計算用紙は持ち帰りなさい。
- 10 問題に関する質問は受け付けません。問題に不備があると考える場合は、解答用紙にその旨を記載してください。採点の際に考慮します。

第 1 問.

観測・光学系等に関する様々な事項について、以下の独立した問い（問 1～問 3）に解答せよ。また、解答用紙に式や考え方を書く欄がある問題については、解答に至るまでの説明を付すこと。

問 1. 現在、赤緯 $-20^{\circ} \sim 50^{\circ}$ 、赤経 $4^{\text{h}} \sim 8^{\text{h}}$ の領域（一般に日本からは冬季に観測しやすいと言われるような領域である）に存在する、1.5 等よりも明るい恒星を 7 つ全て挙げよ。解答は解答用紙に記載の例に従って、固有名とバリエール符号を共に記すこと。

問 2. 凸レンズにおける色収差（軸上色収差）とは何か、下記の語句群を全て用いて 2 行程度で説明せよ。

語句群：屈折率、分散、焦点距離

問 3. 反射望遠鏡に用いられる反射鏡の鏡面の精度を確認する方法の一つであるフーコーテストについて、以下の問いに答えよ。

(1) 外部からの光が入射しない暗い部屋に、完全な球面鏡を設置した。図 1-1 のように、球面鏡の底を原点とし、球面鏡の光軸に垂直な面内で x, y 座標を、光軸に沿って z 座標を取った。いま、 z 軸上のある点 A に十分小さな点光源を置いたところ、図 1-1 のように、点 A から放射され、球面鏡によって反射された光は、点 A に極めて近い z 軸上の点 A' に集まった。

点 A, A' の間に円形の覆いを設置し、 z 軸上で A' よりも z 軸正方向にある点 O から球面鏡を観測すると、球面鏡で反射された点光源からの光により、鏡全体が光っている様子が見えた。また点光源から点 O に向かって z 軸正方向に放射された光は円形の覆いによって完全に遮られ、点 O からは観測されなかった。

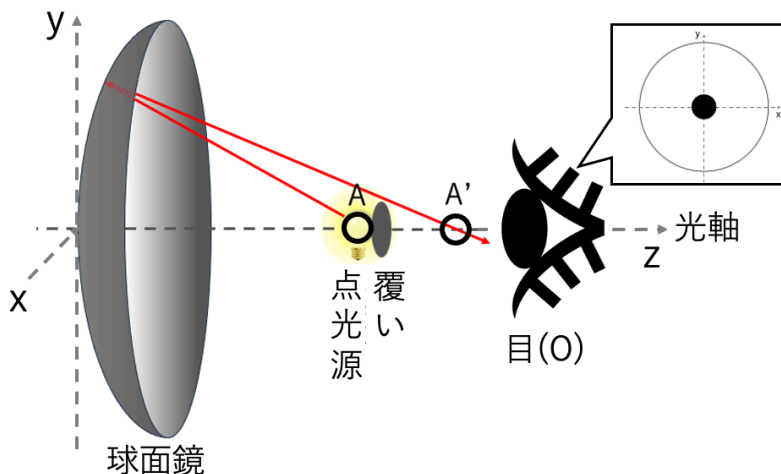


図 1-1: 球面鏡と光源・視点の相対図（実際には光源や覆いは限りなく小さいため、 A と A' の位置はほぼ同じである）

次に、障害物（剃刀の刃など）を z 軸に垂直な方向から $x \leq 0$ の領域に入れる。ただし障害物は AA' 間の距離に対して十分薄く、また点光源や鏡から出てきた光を遮れるほど大きいものとする。 z 軸上で、点 A' よりも球面鏡に近いところに点 P_1 を、観測者に近いところに点 P_2 を取る。図 1-2 のように、 P_1, A', P_2 のいずれかに x 軸負の方向から障害物を入れ、点 O から球面鏡を見たとき、影となっている部分はどこか、それぞれ解答用紙の図を黒く塗りつぶして答えよ。

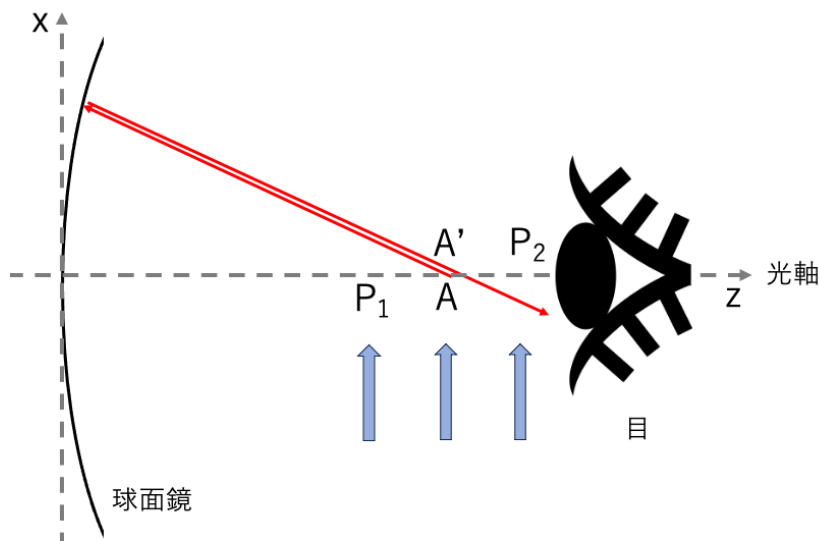


図 1-2: y 軸正の方向から見た、球面鏡と観測点の相対図（覆いと光源を省略している）

第 1 問 問 3. は次ページに続く。

(2) 外部から光が入射しない暗い部屋に完全な回転放物面鏡を設置し, (1) 同様に座標を取った。いま, z 軸上の点 A に十分小さな点光源を置いたところ, 図 1-3 のように, 鏡面上の点 H で反射された光のみが, 点 A に極めて近い z 軸上の点 A' に集まった。また, 鏡面の端にあたる点 $H_{\max}$ で反射される光は, 点 A より後ろの点 A'' に集まった。ただし H は $H_{\max}$ よりも鏡面中心に近いものとする。

点 A, A' の間に円形の覆いを設置し, z 軸上で A' よりも z 軸正方向にある点 O から回転放物面鏡を観測したところ, 回転放物面鏡で反射された点光源からの光により, 鏡全体が光っている様子が見えた。また, 球面鏡同様に, 点光源から点 O に向かって放射された光は円形の覆いによって完全に遮られ, 点 O からは観測されなかった。

次に, 障害物 (剃刀の刃など) を z 軸に垂直な方向から $x \leq 0$ の領域に入れる。ただし障害物は AA' 間の距離に対して十分薄く, また点光源や鏡から出てきた光を遮れるほど大きいものとする。 z 軸上で, 点 A' よりも回転放物面鏡に近いところに点 Q を取る。図 1-3 のように, Q, A' のいずれかに x 軸負の方向から障害物を入れ, 点 O から回転放物面鏡を見たときに, 影となっている部分はどこか, それぞれ解答用紙の図を黒く塗りつぶして答えよ。

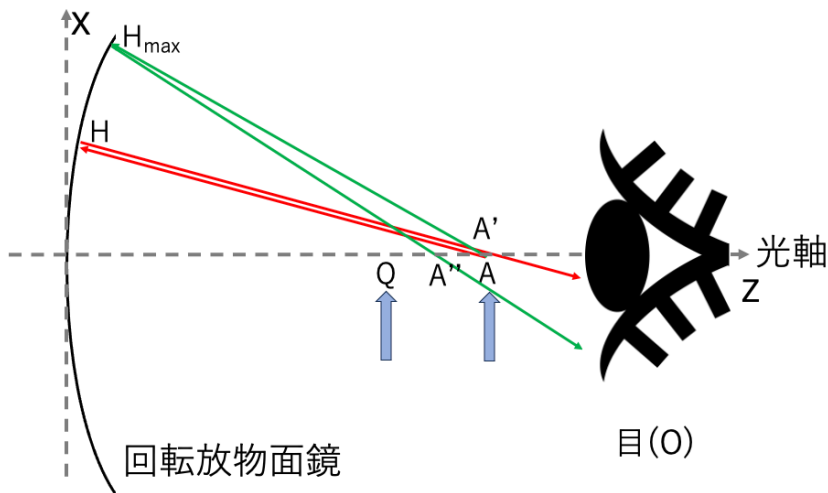


図 1-3: y 軸正の方向から見た, 回転放物面鏡と観測点の相対図 (覆いと光源を省略している)

計 算 用 紙

(切り離さずに用いよ.)

第 2 問.

1 年間を通じて、地球上のある地点で、毎日決まった時刻における天球上の太陽の位置を繋いでできる曲線であるアナレンマについて、以下の問いに答えよ。ただし、本問で用いる時間の単位は、SI 単位系においてセシウム原子時計によって定義されている 1 秒を用いて、

$$\begin{aligned}60 \text{ 秒} &= 1 \text{ 分}, \\60 \text{ 分} &= 1 \text{ 時間}, \\24 \text{ 時間} &= 1 \text{ 日}, \\360 \text{ 日} &= 1 \text{ 年}.\end{aligned}$$

と定義するものとする。必要に応じて、問題冊子末尾の公式集を用いること。

問 1. 以下のような仮想の天体、惑星 E_1 を考える。

- 惑星 E_1 は太陽の周りを完全な円軌道で公転している。
- 惑星 E_1 の公転周期は 1 年である。
- 惑星 E_1 の公転および自転方向は、惑星 E_1 の北極側から見て反時計回りである。
- 惑星 E_1 の恒星日は $\frac{360}{359}$ 日である。
- 惑星 E_1 の北緯 30° に位置する、ある地点を P_1 とする。
- あるとき、 P_1 において太陽が南中した。このときを 1 日の始まり (0 時) とし、以降 24 時間ごとに日が変わるものとして、惑星 E_1 における暦を定める。さらに、一日の中では単位としての時間、分、秒を用いて、0 時から 23 時、0 分から 59 分まで、0 秒から 59 秒までで時刻を表記する。
- 惑星 E_1 の自転軸は公転面に対して垂直である。

いま、天球上における座標系を、地球における赤道座標系と同様に、惑星 E_1 の赤道面を基準として設定する。このとき、惑星 E_1 から見た太陽は天球上で、図 2-1 における赤線のように、天の赤道を 1 年間かけて 1 周するように見える。

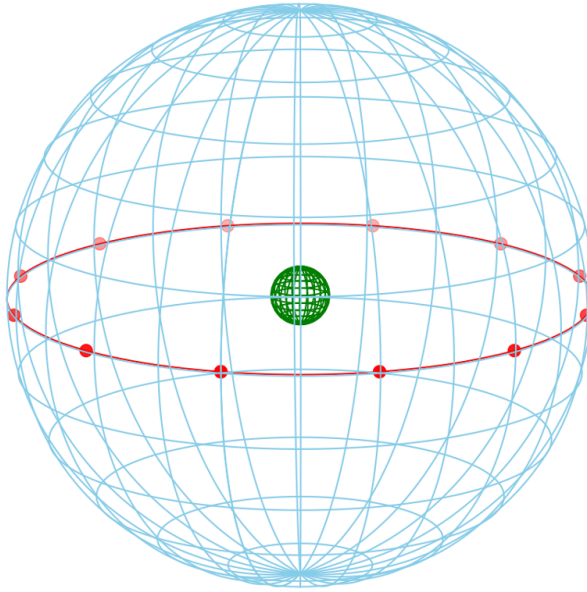


図 2-1: 惑星 E_1 から見たときの天球上での太陽の経路。赤色の点は 30 日おきの太陽の位置を、青線は天球の赤経・赤緯線を示している。

- (1) 惑星 E_1 において、とある太陽の南中時刻より次の太陽の南中時刻までの時間を、日を単位として求めよ。
- (2) 惑星 E_1 上の北緯 30° 地点における太陽の南中高度は一年を通して変化するか、実際の南中高度の値を含め、1 行程度で簡潔に記述せよ。

惑星 E_1 から見た太陽のように、天球における天の赤道上を等速円運動する、仮想上の太陽を「平均太陽」と呼ぶことにする。

問 2. 次に自転軸が公転面に垂直でない惑星 E_2 を考えよう。惑星 E_2 の設定は以下の通りである。ただし、惑星 E_1 は、惑星 E_2 の運動に一切干渉しない。

- 惑星 E_2 は太陽の周りを完全な円軌道で公転している。
- 惑星 E_2 の公転周期は 1 年である。
- 惑星 E_2 の公転および自転方向は、惑星 E_2 の北極側から見て反時計回りである。
- 惑星 E_2 の恒星日は $\frac{360}{359}$ 日である。
- 惑星 E_2 の北緯 30° に位置する、ある地点を P_2 とする。
- 惑星 E_2 の自転軸は公転面に垂直な軸に対して 30° 傾いている。
- 惑星 E_2 の暦においては、一年の始まり（一日目、0 時）を、 P_2 において一年を通じて最も低い南中高度で太陽が南中した瞬間とする。以降、24 時間ごとに日が変わる。また、一日の中では単位としての時間、分、秒を用いて、0 時から 23 時、0 分から 59 分まで、0 秒から 59 秒までで時刻を表記する。

また、冬至、春分、夏至、秋分を以下のように定義する。

- P_2 において 1 年を通じて、最も低い南中高度で南中した瞬間 (つまり 1 年の始まり) を冬至、最も高い南中高度で南中した瞬間を夏至とする。
- 天球上で、天の赤道を太陽が南から北に通過する瞬間を春分、北から南に通過する瞬間を秋分とする。
- 冬至、春分、夏至、秋分における天球上での太陽の位置を、それぞれ冬至点、春分点、夏至点、秋分点とする。

このとき、惑星 E_2 から見た太陽は天球上で、図 2-2 内の橙線上を 1 年間かけて動いていくように見える。

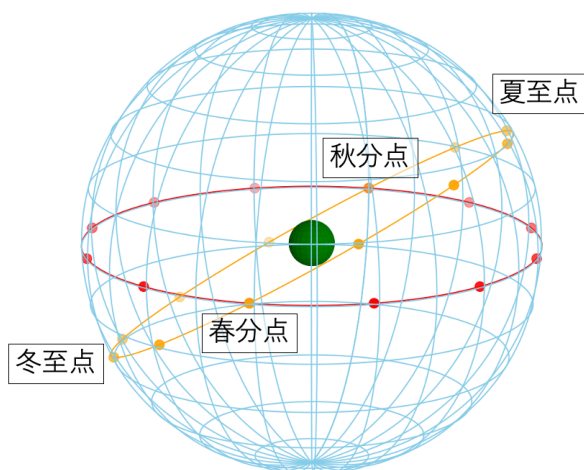


図 2-2: 惑星 E_2 から見たときの天球上での太陽の経路。赤色の点は 30 日おきの平均太陽の位置を、橙色の点は 30 日おきの太陽の位置を示している。

惑星 E_2 から見た太陽の位置を考える。 P_2 で一年中太陽を同時刻に見ると、実際の太陽の位置と、平均太陽の位置は必ずしも一致するわけではない。

(1) 惑星 E_2 の北緯 25° 地点における、一年を通しての太陽の南中高度の最高値および最低値を求めよ。

P_2 から見た太陽が天球上で描く軌跡を具体的に計算するため、二次元座標における回転を考える。

(2) 二次元直交座標において、座標 (p, q) を原点を中心として反時計回りに角度 α だけ回転し、図 2-3 のように座標 (P, Q) に一致させることを考える。回転移動後の座標 (P, Q) を、 p, q, α を用いて表せ。

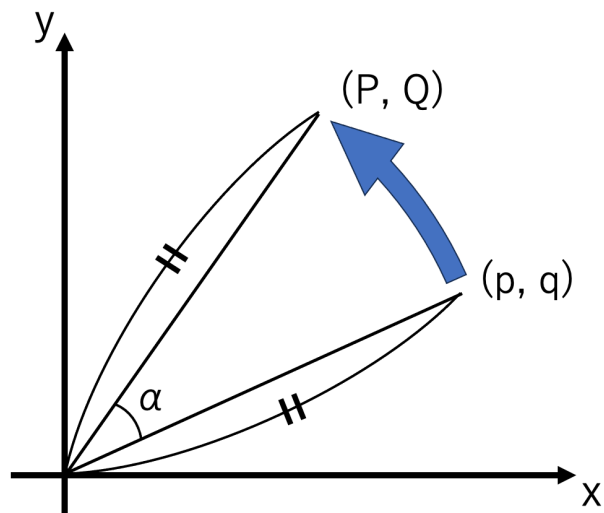


図 2-3: 二次元直交座標系における回転移動

(3) 太陽の天球上の位置を表すため、図 2-4 のように座標を定義する。この天球の半径を 1 とするとき、 t 日目の平均太陽の位置は、 $(\cos t, \sin t, 0)$ と表すことができる。(2) で求めた式を、 $\alpha = -30^\circ$ として、 x 軸、 z 軸に適用し、太陽の実際の位置 (x, y, z) を、 t を用いて表せ。

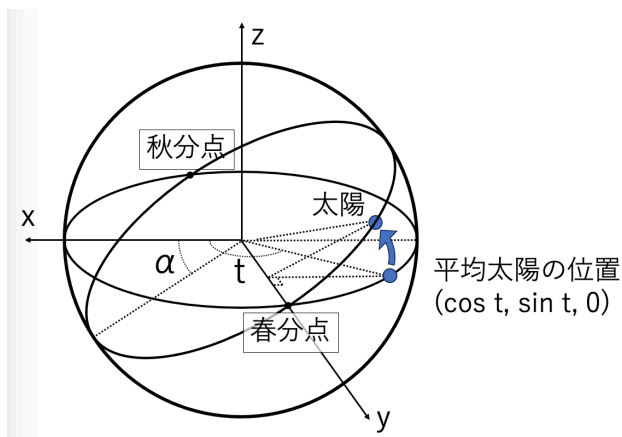


図 2-4: 惑星 E_2 から見た天球上での太陽と平均太陽の位置関係

(4) 太陽と平均太陽の天球上での距離について述べた以下の文章中の空欄 $\boxed{A}$, $\boxed{B}$ にあてはまる数字を答えよ。

平均太陽と太陽、天球の中心を結ぶ、図 2-5 に示した扇型を考える。扇型の中心角の大きさを $r[\text{deg}]$ ($0^\circ \leq r \leq 360^\circ$) とするとき、天球の中心、太陽、平均太陽を結んでできる三角形に注目することで、 $\cos r = \boxed{A} + \boxed{B} \sin^2 t$ と表せる。

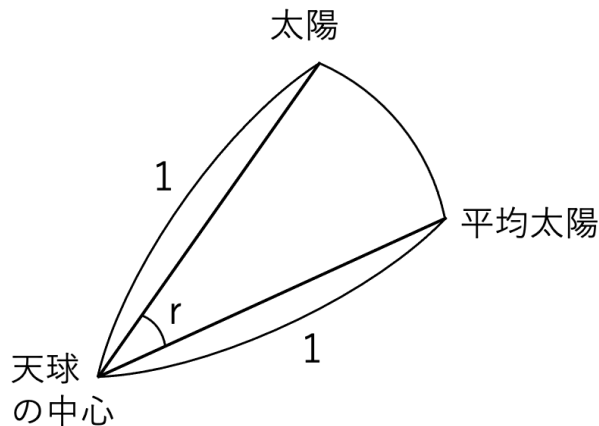


図 2-5: 中心を天球の中心とし, 太陽, 平均太陽を結んだ扇型

(5) 太陽と平均太陽の南北及び東西方向の変位について述べた以下の文章中の空欄 C, D, E にあてはまる数字, 及び下線部 (a) にあてはまる語句を答えよ。

(4) で求めた扇型を含む面と天の赤道面がなす角度 θ [deg] について, P_2 から見た太陽周辺の天球表面は図 2-6 のようになる。この図をもとに, $\tan \theta$ の値を考える。

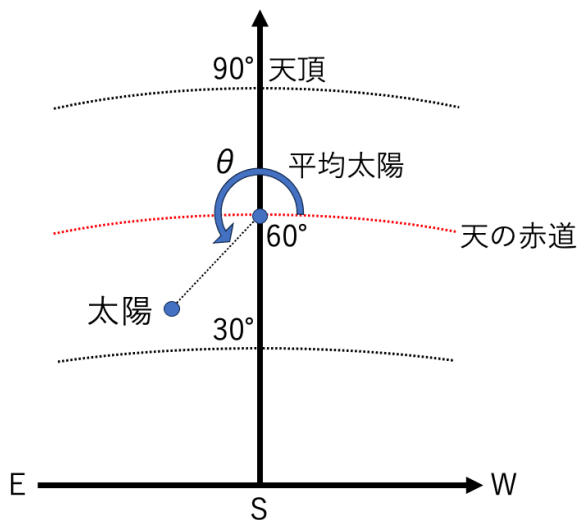


図 2-6: 天球表面の一部

太陽の平均太陽に対する南北方向の変位は (3) における z 座標の値で近似できるため, C である。

次に, 太陽の平均太陽に対する東西方向の変位を考える。図 2-7 は天球を真上 (天の北極方向に無限遠点) から見ている。時計回り (西) を正の方向とする。東西方向の変位を時角で表したものは (a) _____ と呼ばれている。これを角度で表したものは, 図 2-7 中の黒

点線上の長さ s に近似でき, $\boxed{D}$ である。よって,

$$\tan \theta = \frac{\boxed{C}}{\boxed{D}} = \boxed{E} \times \frac{1}{\sin t}$$

と表せる。

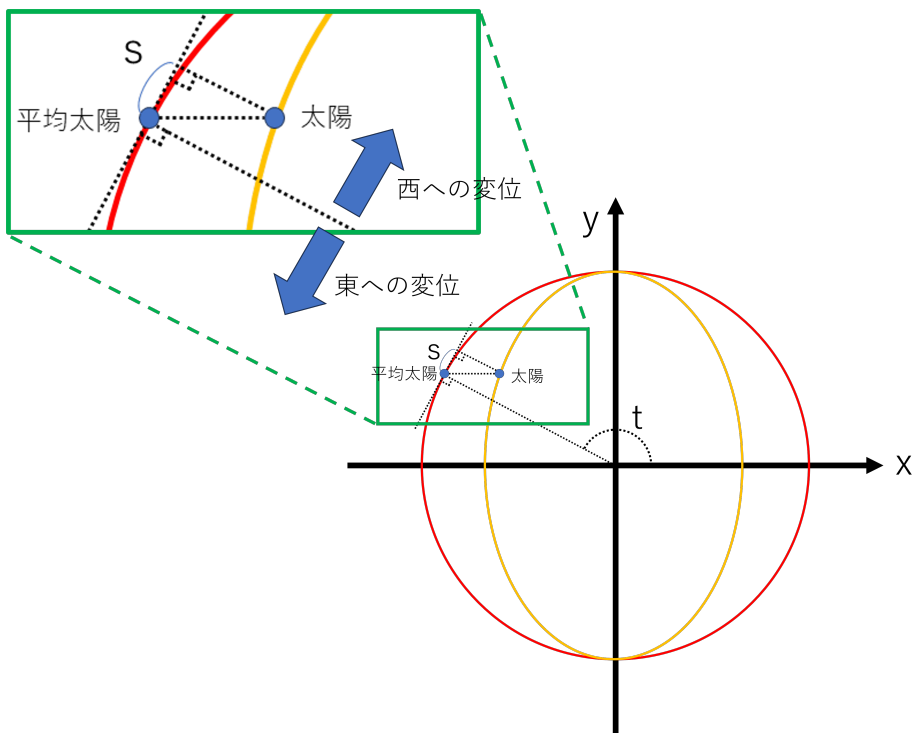


図 2-7: 天球を真上 (天の北極方向) から見たときの図

(6) (5) の結果より,

$$\theta = \arctan \left(\frac{\boxed{C}}{\boxed{D}} \right) = \arctan \left(\boxed{E} \times \frac{1}{\sin t} \right)$$

となる。このとき, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$ の正負, および θ の範囲を, 解答用紙中の表に記せ。ただし, 表の $\boxed{C}$, $\boxed{D}$ の列の欄には正負を, θ の列の欄には, あてはまる θ の範囲を下記 (A) ~ (D) からそれぞれ一つずつ選び, 記号で答えよ。

- (A) $0^\circ < \theta < 90^\circ$
- (B) $90^\circ < \theta < 180^\circ$
- (C) $180^\circ < \theta < 270^\circ$
- (D) $270^\circ < \theta < 360^\circ$

(7) $\boxed{F}$, $\boxed{G}$ に当てはまる数字を答えよ。

r と θ の関係を考える。(4), (5) を用いることで,

$$r = \pm \arccos \left(\boxed{F} + \boxed{G} \times \frac{1}{\tan^2 t} \right)$$

と表すことができる。

(8) t, θ, r について、解答用紙の表を、例に従って埋めなさい。電卓を用いるときは、角度のラジアン (radian, rad) 表記と度 (degree, deg) 表記の違いに気をつけること。

(9) (8) で作成した表を用いて、以下の問いに答えよ。

① 解答欄の図において 15 日ごとの、平均太陽に対する太陽の変位を、向きに気をつけて黒矢印で示しなさい。0 日目は赤矢印で示している。ただし、①の配点は 0 点である。

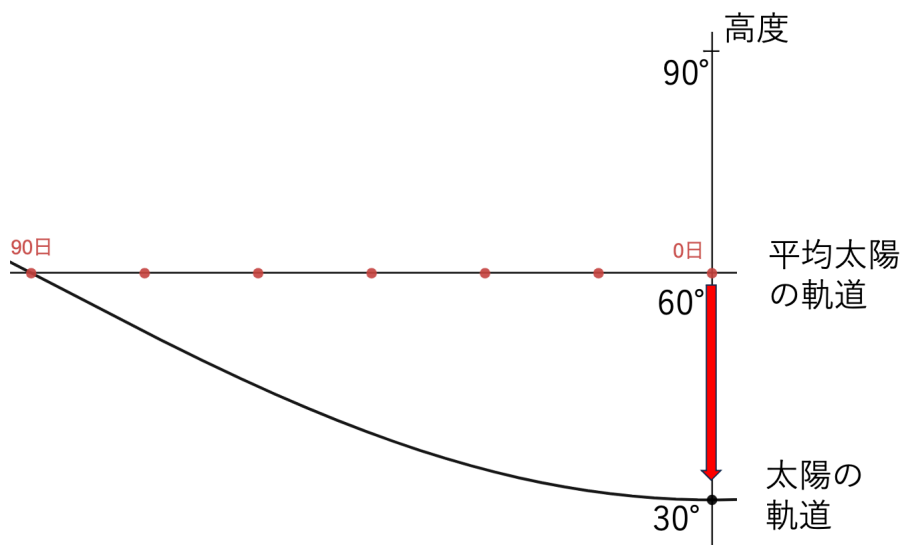


図 2-8: 平均太陽に対する太陽の位置の変位方向 (解答は解答用紙中の図に示すこと)

② (8) で得た表及び①の作図を参考に、 P_2 において毎日 0 時に見た場合のアナレンマを作図せよ。解答欄の図に

- 15 日ごとの、太陽が見える位置
- 想定されるアナレンマの形
- アナレンマ上を太陽が進む向き (矢印で示すこと)
- 春分点, 夏至点, 秋分点, 冬至点 (どの点がどれに対応するか明記すること)

を示しなさい。

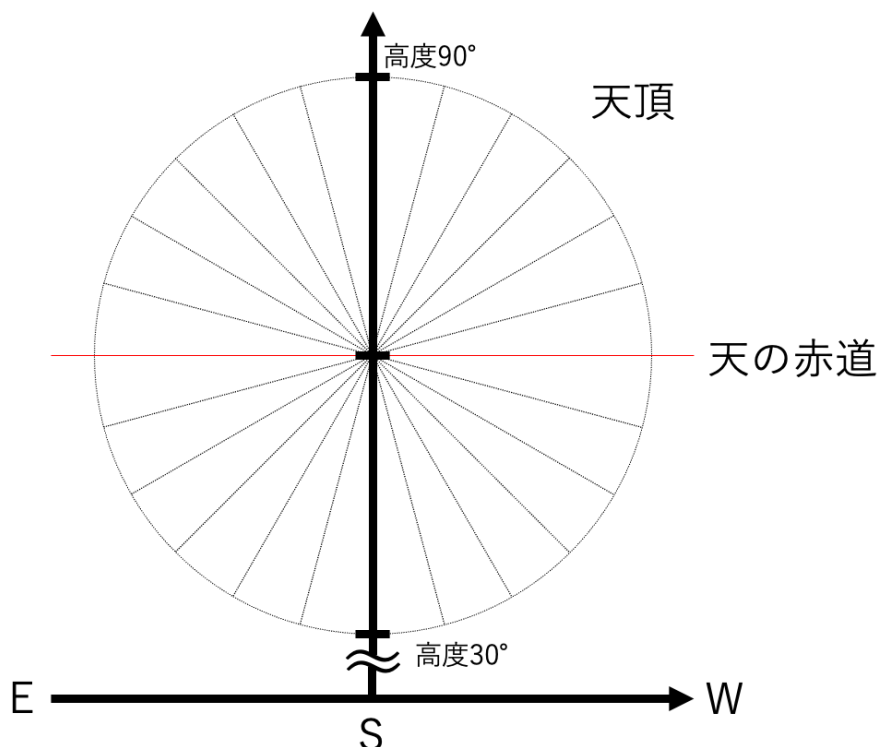


図 2-9: アナレンマの作図用座標 (解答は解答用紙中の図に示すこと。)

問 2 で議論した, 惑星 E_2 から見た太陽を「理想太陽」と名づける。

問 3. 最後に公転軌道が円でない場合を考えよう。惑星 E_3 の設定は以下の通りである。ただし, 惑星 E_1, E_2 は, 惑星 E_3 の運動に一切干渉しない。

- 惑星 E_3 は太陽を一つの焦点とする完全な楕円軌道で公転している。
- 惑星 E_3 の公転周期は 1 年である。
- 惑星 E_3 の公転および自転方向は惑星 E_3 の北極側から見て反時計回りである。
- 惑星 E_3 の恒星日は $\frac{360}{359}$ 日である。
- 惑星 E_3 の北緯 30° に位置する, ある地点を P_3 とする。
- 惑星 E_3 の暦においては, 一年の始まり (一日目, 0 時) を, P_3 において一年を通じて最も低い南中高度で太陽が南中した瞬間とする。以降, 24 時間ごとに日が変わる。また, 一日の中では単位としての時間, 分, 秒を用いて, 0 時から 23 時, 0 分から 59 分まで, 0 秒から 59 秒までで時刻を表記する。
- 一年で最も太陽と惑星 E_3 が近づくときの太陽の位置を近日点, 最も遠ざかるときの太陽の位置を遠日点とし, 近日点の瞬間を V 日目とする。
- P_3 において 1 年を通じて最も低い南中高度で南中した瞬間 (つまり一年の始まり) を冬至, 最も高い南中高度で南中した瞬間を夏至とする。
- 天球上で, 天の赤道を太陽が南から北に通過する瞬間を春分, 北から南に通過する瞬間

を秋分とする。

- 冬至, 春分, 夏至, 秋分における天球上での太陽の位置を, それぞれ冬至点, 春分点, 夏至点, 秋分点とする。

(1) 図 2-10 は $V = 0$ 日 のときの, 惑星 E_3 から見た太陽の相対的運動 (楕円軌道) を示している。0 日目 (近日点通過), 90 日目, 180 日目 (遠日点通過), 270 日目において, 太陽は天球の軌道上で理想太陽よりも, 東にいるか, 同じ位置にいるか, 西にいるか, 理由とともに答えよ。なお, 理由の解答にあたっては, 「ケプラーの第二法則」という語句を必ず用いること。解答用紙に記載されている図を用いても良い。

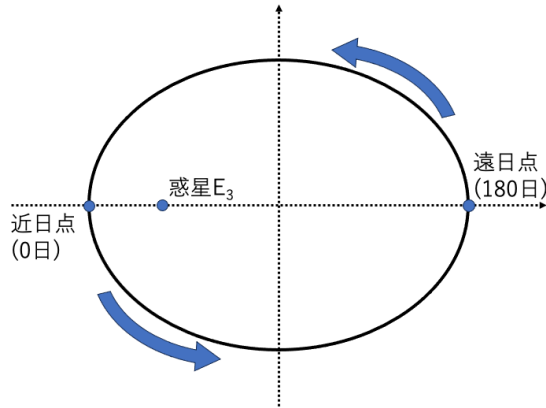


図 2-10: 惑星 E_3 を中心として見たときの太陽の軌道

(2) $V = 0$ 日, 90 日, 180 日, 270 日 のとき惑星 E_3 から見た太陽の描くアナレンマはどのような形になると考えられるか。また, 離心率の大きさはアナレンマの形にどのような影響を与えるか, 考察せよ。必要であれば問 2 (9) ①で作図した図や解答欄の図を用いること。

公式集

逆三角関数

逆三角関数 $\arccos$, $\arcsin$, $\arctan$ は以下のように定義される。

$r_1 = \cos \theta_1$ ($-1 \leq r_1 \leq 1$) のとき, $\theta_1 = \arccos r_1$ である。

$r_2 = \sin \theta_2$ ($-1 \leq r_2 \leq 1$) のとき, $\theta_2 = \arcsin r_2$ である。

$r_3 = \tan \theta_3$ のとき, $\theta_3 = \arctan r_3$ である。

※ 逆三角関数の定義域, 値域は各種条件によって異なる。

三角比の公式

三角比の相互関係

- $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
- $\frac{1}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta + 1$
- $\frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\tan^2 \theta} + 1$

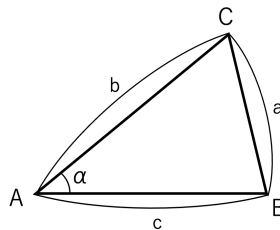
加法定理

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

余弦定理

下図の三角形において, 次が成り立つ:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$



その他

座標上の点と点の距離

三次元直交座標上の 2 点 (X_1, Y_1, Z_1) , (X_2, Y_2, Z_2) の間の距離 d について, 以下が成り立つ:

$$d = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2}$$

