第3回日本天文学オリンピック本選 【理論問題】 解答*

日本天文学オリンピック委員会

第1問

問1.

(1) $\dfrac{L}{L_\odot} = \left(\dfrac{R}{R_\odot}\right)^2 \left(\dfrac{T}{T_\odot}\right)^4$ より,

$$\frac{R}{R_\odot} = \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{1/2} \left(\frac{T}{T_\odot}\right)^{-2} = \sqrt{1000} \cdot \left(\frac{5800\,\mathrm{K}}{3000\,\mathrm{K}}\right) \simeq 1.2 \times 10^2$$

であるので, 1.2×10^2 倍。
(2) 収縮開始から現在までに放射エネルギーの形で放出されたエネルギー量は,

$$0 - \left(-\frac{3}{5}G\frac{M_\odot^2}{R_\odot}\right) = \frac{3}{5}G\frac{M_\odot^2}{R_\odot}$$

である。これを $L_\odot$ で割って,

$$\frac{3}{5}G\frac{M_\odot^2}{R_\odot} \cdot \frac{1}{L_\odot} \simeq 6.02 \times 10^{14}\,\mathrm{s} \simeq 1.9 \times 10^7\,\mathrm{yr}$$

より 1900 万年。これは, たとえば放射性元素による年代測定によって, 1900 万年前より古い化石, 岩石が豊富に見つかっているため, 妥当であるとは言えない。

問2.

地球中心から月の方向に距離 r だけ離れた地点のポテンシャル $U(r)$ $(0 < r < a)$ は,

$$U(r) = -\frac{GM}{r} - \frac{Gm}{a-r}$$

このポテンシャルが最大値をとる r は,

$$\frac{dU}{dr} = \frac{GM}{r^2} - \frac{Gm}{(a-r)^2}$$

*ここで示したのは解答の一例です。実際の採点においては, ここに記した解以外にも得点を認めたものが存在します。

がゼロとなる

$$r_0 = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{m}+\sqrt{M}}a$$

である。月に到達するには, 地表からポテンシャル最大の $r = r_0$ まで到達できれば良い。求める初速を v_0 とすると, エネルギー保存則より

$$U(R) + \frac{1}{2}v_0^2 = U(r_0)$$

を解けばよく, 適切に具体値を代入すると $11.1\,\mathrm{km\,s^{-1}}$。

問 3.

(1)

$$g = \frac{GM}{R^2}, M = \frac{4}{3}\pi\rho_0 R^3$$

より,

$$R = \frac{3g}{4\pi G\rho_0} \simeq 4.3 \times 10^3\,\mathrm{km}$$

である。

(2)　高さ H の山の底面にかかる圧力は, $\rho g H$ である。これが $200\,\mathrm{MPa}$ を超えなければよいので,

$$H_{\max} \simeq 1.7 \times 10^1\,\mathrm{km}.$$

問 4.

(1)　ケプラーの第 2 法則より,

$$\frac{1}{2}(1-e)av = \frac{\pi\sqrt{1-e^2}a^2}{P}.$$

ケプラーの第 3 法則より,

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2}.$$

連立して,

$$v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}\frac{GM}{a}}.$$

(2)　まず, ケプラーの第 3 法則より

$$GM = 4 \times 3.1^2 \times \frac{(1.5 \times 10^{11}\,\mathrm{m})^3}{(3.1 \times 10^7\,\mathrm{s})^2}$$

であるので, これを前問の結果に代入して,

$$v \simeq 3 \times 10^1\,\mathrm{km\,s^{-1}}.$$

問 5.

(1)　現在の太陽の光度が, 形成された直後の太陽の光度よりも大きいから。
(2)
天体: 木星の衛星エウロパ, 土星の衛星エンケラドゥスなど
理由: 質量が大きい惑星の周りを公転しているので, 大きな潮汐力がはたらき, それにより加熱されたから。

第 2 問

問 1.

(1-a)　たとえば, $\log(T/\mathrm{K}) = 4.15$ での半径上限, 下限をそれぞれ R_1, R_2 とする。また, そのときの光度をそれぞれ L_1, L_2 とする。このとき, $L = 4\pi\sigma R^2 T^4$ より,

$$\log\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}\log\frac{L_1}{L_2}$$

が成り立つ。よって,

$$\frac{R_1}{R_2} = 10^{\frac{1}{2}(\log L_1 - \log L_2)} = 10^{10/2} \simeq 3.2$$

であるので, 3.2 倍。
(1-b)　白色矮星はエネルギーを生成せず, 冷却されていくのみである。冷却される時間には, 宇宙年齢の上限があるため, 表面温度には下限が定まる。
(2-a)　ブラックホール, 中性子星
(2-b)　核融合によって恒星中心部で重元素が生成されたあとに, それをまき散らす役割を持つ。
(2-c)　輝線のずれはドップラーシフトによる。等方的に膨張しているため, 視線方向の速度は, A と G でゼロ, また, D で最大となる。これを表している図は 3 のみである。

問 2.

(1)　体積に密度をかけて,

$$M_{\mathrm{mat}}(t) = \frac{4}{3}\pi\rho_0 R^3$$

(2)　与えられた単位質量あたりの内部エネルギーの表式に質量をかけて,

$$\begin{aligned} U(t) &= M_{\mathrm{mat}}(t)\cdot\epsilon_U \\ &= \frac{4}{3}\pi\rho_0 R^3\cdot\frac{1}{\gamma-1}\frac{p_2}{\rho_2} \\ &= \frac{4\pi\rho_0}{3(\gamma-1)}\frac{p_2}{\rho_2}R^3 \end{aligned}$$

と求まる。ここで, Rankine–Hugoniot の式より,

$$\rho_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_0, p_2 = \frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2 p_1 = \frac{2\gamma}{\gamma+1}V_{\mathrm{sh}}^2\frac{\rho_0}{\gamma p_1}p_1 = \frac{2}{\gamma+1}\rho_0 V_{\mathrm{sh}}^2$$

であるので, これを先ほど求めた式に代入して,

$$U(t) = \frac{8\pi\rho_0}{3(\gamma+1)^2} V_{\mathrm{sh}}^2 R^3.$$

(3)　衝撃波面は星間空間の静止系に対して速度 V_{sh} で膨張し, 衝撃波面の静止系で見て衝撃波面内の物質は速度 v_2 で内側に流れるから, 衝撃波面内の物質は星間物質の静止系に対して速度

$$V_{\mathrm{mat}} = V_{\mathrm{sh}} - v_2$$

で膨張している。さらに, Rankine–Hugoniot の式より

$$v_2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} v_1 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} V_{\mathrm{sh}}$$

であるので, これを代入して,

$$V_{\mathrm{mat}} = \frac{2}{\gamma+1} V_{\mathrm{sh}}$$

と求まる。
(4)　具体的に $K(t)$ を計算し, それが $U(t)$ に等しいことを確かめる：

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{2}\rho_0 V_{\mathrm{mat}}^2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \\ &= \frac{1}{2}\rho_0 \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^2 V_{\mathrm{sh}}^2 \frac{4}{3}\pi R^3 \\ &= \frac{8\pi\rho_0}{3(\gamma+1)^2} V_{\mathrm{sh}}^2 R^3 \\ &= U(t) \end{aligned}$$

(5)　エネルギー保存則より,

$$E_0 = \frac{16\pi\rho_0}{3(\gamma+1)^2} V_{\mathrm{sh}}^2 R^3$$

であるので, これを V_{sh} について解いて,

$$V_{\mathrm{sh}} = \sqrt{\frac{3E_0(\gamma+1)^2}{16\pi\rho_0}} R^{-3/2}.$$

(6)

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{3E_0(\gamma+1)^2}{16\pi\rho_0}} R^{-3/2}$$

に, 問題文にて与えられた $R = ct^\alpha, \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = c\alpha t^{\alpha-1}$ を代入して,

$$c\alpha t^{\alpha-1} = \sqrt{\frac{3E_0(\gamma+1)^2}{16\pi\rho_0}} c^{-3/2} t^{-3\alpha/2}.$$

これが恒等式となるように c, α を定めて,

$$R(t) = \left(\frac{75 E_0 (\gamma+1)^2}{64\pi\rho_0} \right)^{1/5} t^{2/5}.$$

(7)　具体値を代入して計算する：

$$R \simeq 14.0\,\mathrm{pc}$$

第 3 問

問 1.

(1)　(お)
(2)　(え)：この中で生まれた高温の星が放出する紫外線により周囲の水素が電離されて光っている星形成領域。
(3)　宇宙空間は地球上に比べ低圧力・低密度であるから。
(4)　ビックバンから 38 万年後に, 電子が原子核に捕捉される宇宙の晴れ上がりが起きたことで, 水素原子が安定に存在できるようになった。

問 2.

(1)　電子のとる軌道が, 準位の高い軌道から低い軌道に遷移するときに, エネルギーを電磁波の形で放出することで生じる。
(2-a)　E_J の式から p_θ を消去する：

$$E_J = \frac{p_\theta^2}{2I} = \frac{h^2}{8\pi^2} \frac{J(J+1)}{I}.$$

(2-b)　具体値を代入して計算：

$$I \simeq 1.45 \times 10^{-46}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

(2-c)

$$\Delta E = \frac{h^2}{8\pi^2 I}(1 \cdot 2 - 0 \cdot 1) \simeq 7.68 \times 10^{-23}\,\mathrm{J}.$$

(2-d)　$E = h\nu, \lambda\nu = c$ より,

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} \simeq 2.59 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}.$$

　また, これはミリ波にあたるので, ①のアルマ望遠鏡が正解。
(3-a)　107.7 GHz を実際に観測された波長に直して,

$$\frac{2.998 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{107.7\,\mathrm{GHz}} \simeq 2.78 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}.$$

よって,

$$z = \frac{2.78 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 2.59 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}}{2.59 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}} \simeq 0.073.$$

また, $v = cz, v = Hr$ より,

$$r = \frac{cz}{H} \simeq 3.1 \times 10^2\,\mathrm{Mpc}.$$

(3-b) $\nu_{\rm rest} = (1+z)\nu$ より,

$$L_{\rm CO} \simeq 4.4 \times 10^9\,{\rm K\,km\,s^{-1}\,pc^2}.$$

(3-c) $L_{\rm CO}$ に変換係数 $X_{\rm CO}$ をかけて,

$$M_{\rm mol} \simeq 4 \times 10^9 \ M_\odot.$$

(3-d) $M_{\rm mol}$ を 1 年あたりに作られる恒星の質量で割って,

$$\frac{4 \times 10^9 \ M_\odot}{1 \times 10^2 \ {\rm M_\odot/yr}} \simeq 4 \times 10^7\,{\rm yr}.$$