

第3回日本天文学オリンピック

本選問題

令和6年2月23日 13時15分—15時45分

理論

注意事項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 問題冊子は全部で12ページあります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆または黒色シャープペンシルを使用しなさい。
- 4 解答用紙の指定欄に受験番号を記入しなさい。また、指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 5 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、草稿用に使用してもよいが、問題冊子は破いてはいけません。
- 8 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
- 9 試験終了後、問題冊子・計算用紙は持ち帰りなさい。
- 10 問題に関する質問は受け付けません。問題に不備があると考えた場合は、解答用紙にその旨を記載してください。採点の際に考慮します。

第 1 問.

太陽系に関する様々な事項について、以下の独立した問い (問 1~問 5) に解答せよ。解答用紙には、最終的な答えのみでなく、式や考え方など解答に至るまでの説明を付すこと。

問 1. 太陽の形成・進化について、次の問い (1), (2) に答えよ。必要ならば、現在の太陽質量 $M_{\odot} = 2.0 \times 10^{30}$ kg, 現在の太陽半径 $R_{\odot} = 7.0 \times 10^5$ km, 現在の太陽光度 $L_{\odot} = 3.8 \times 10^{26}$ W, 現在の太陽の表面温度 $T_{\odot} = 5800$ K, 万有引力定数 $G = 6.67 \times 10^{-11}$ m³ kg⁻¹ s⁻² を用いてよい。

(1) 現在では、約 46 億年前に星間ガスが収縮した際に、重力エネルギーの解放によりガス球の内部が高温となり、そのガス球が原始太陽として輝き始めたことが分かっている。原始太陽の表面温度を 3000 K, 光度を $1000 L_{\odot}$ としたとき、原始太陽の半径は現在の太陽半径の何倍か、有効数字 2 桁で求めよ。

(2) 19 世紀後半に Kelvin と Helmholtz は、太陽が輝くメカニズムとして「初めは半径無限大の球の内部に一様に分布している、密度が極めて小さい全質量 $1.0 M_{\odot}$ のガスが中心部に落ち込んでいく際に重力エネルギーを解放し、放射エネルギーとなる」という仮説を立てた。ここでこの仮説が正しく、太陽が輝くためのエネルギーはすべて重力エネルギーの解放によりまかなわれていると仮定する。簡単のため、太陽が密度一定のガス球であり、太陽の光度はこれまで常に一定であるとした上で、ガスが無遠慮から現在の半径にまで収縮するのに何年かかるか、有効数字 2 桁で求めよ。また、この結果は妥当であるといえるか、簡潔に議論せよ。ただし、全質量 M , 半径 R のガス球の重力エネルギーは $U = -\frac{3}{5}G\frac{M^2}{R}$ で与えられる。

問 2. 地球から月面に向けて発射されたロケットが月面に到着するために必要な初速度の最小値を有効数字 2 桁で求めよ。ただしロケットは地表から打ち上げられた瞬間にのみ加速し、地球、月の質量はいずれも球対称に分布していると仮定せよ。また、万有引力定数 $G = 6.67 \times 10^{-11}$ m³ kg⁻¹ s⁻², 地球質量 $M = 5.97 \times 10^{24}$ kg, 地球半径 $R = 6.38 \times 10^3$ km であり、月の質量 $m = \frac{1}{80}M$, 地球と月の中心同士の距離 $a = 60R$ とする。

問 3. 火星が玄武岩のみで構成されていると仮定して、次の問い (1), (2) に答えよ。

(1) 火星表面の重力加速度は 3.71 m s⁻² であることを用いて、火星の半径を、km を単位として、有効数字 2 桁で求めよ。ただし、玄武岩の密度を 3.10 g cm⁻³ とする。必要ならば、万有引力定数 $G = 6.67 \times 10^{-11}$ m³ kg⁻¹ s⁻² を用いてよい。

(2) 火星における、円柱状の、玄武岩のみで構成される山の高さの限界を、km を単位として、有効数字 2 桁で求めよ。ただし、玄武岩が圧縮に耐えられる圧力は 200 MPa とする。

問 4. ケプラーの法則にしたがって運動する小惑星について考える。次の問い (1), (2) に答えよ。

(1) 太陽を焦点とする楕円軌道を持つ小惑星を考える。この小惑星の軌道長半径を a [m], 軌道の離心率を e とする。また, 万有引力定数を G [$\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$], 太陽質量を M [kg] とする。このとき近日点での公転速度 v を, a, G, M を用いて表せ。なお, 長半径 a , 離心率 e の楕円の面積は $\pi\sqrt{1-e^2}a^2$ と書けることを用いてよい。また, 小惑星の質量は太陽質量に比べ無視できるほど小さいとしてよい。

(2) ある小惑星は, 観測から軌道長半径 1.5 au, 離心率 0.20 の楕円軌道を描くことが分かっている。この小惑星の近日点での公転速度を, 単位を km s^{-1} として, 有効数字 1 桁で求めよ。ただし, $1 \text{ au} = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$, $1 \text{ yr} = 3.1 \times 10^7 \text{ s}$, $\pi = 3.1$ としてよい。

問 5. 生命が生存するには液体の水が必要不可欠である。理論的に惑星表面に水が存在できる領域をハビタブルゾーンという。ハビタブルゾーンについて, 次の問い (1), (2) に答えよ。ただしハビタブルゾーンは放射平衡温度にのみに依存して決まるものとする。

(1) 現在の太陽系において, ハビタブルゾーンに属する惑星は地球のみである。しかし, 太陽系形成直後には金星もハビタブルゾーンに属していたとされている。金星がハビタブルゾーンから外れた理由を考察し, 簡潔に記せ。ただし, 各惑星の軌道長半径は太陽系形成直後から大きく変化していないものとする。

(2) 現在の太陽系において, ハビタブルゾーン外であるものの液体の水が存在しているとされている天体が存在する。その天体を具体的に挙げ, なぜ液体の水が存在できているのか説明せよ。

第 2 問.

恒星の終末に関連した以下の問い (問 1・問 2) に解答せよ。解答用紙には、最終的な答えのみでなく、式や考え方など解答に至るまでの説明を付すこと。

問 1. 恒星の終末は、その (主系列星のときの) 質量によって決まる。以下の問いに答えよ。

(1) およそ $8 M_{\odot}$ 以下の恒星は、進化の最終段階で外層を噴き出し、惑星状星雲を形成する。その後中心部に残された天体が白色矮星である。白色矮星は、HR 図上では、図 2-1 に示した一定の幅の細長い領域にのみ分布する。

(1-a) 図 2-1 を用いて、白色矮星の半径の上限は、下限の何倍か、有効数字 2 桁で求めよ。

(1-b) 図 2-1 に見られる通り、白色矮星の分布域は、ある表面温度より高温側に限られる。この理由を宇宙の歴史に関連させて簡潔に述べよ。

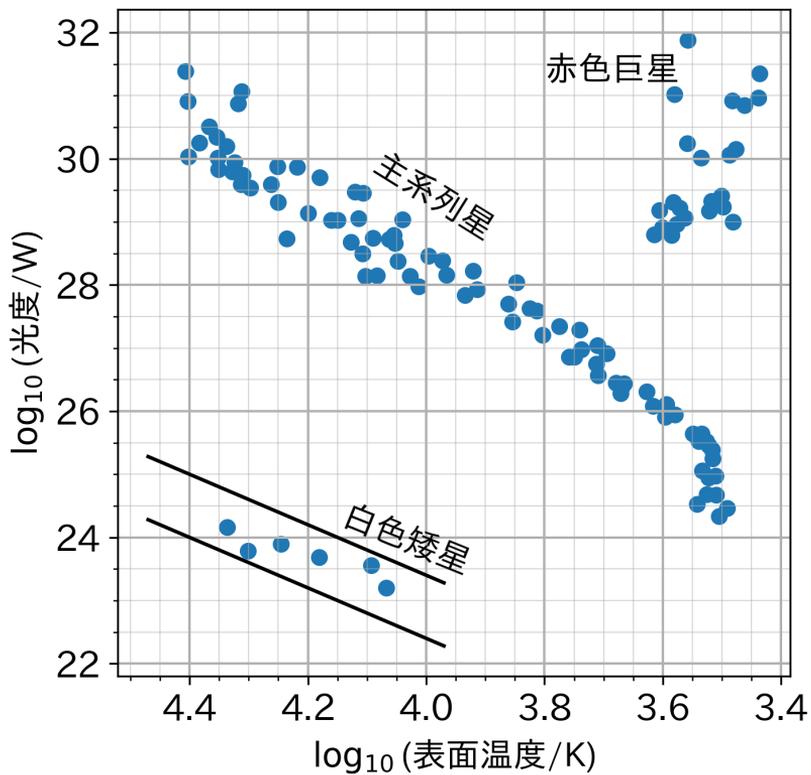


図 2-1: HR 図

- (2) およそ $8 M_{\odot}$ を超える恒星は、進化の最終段階にて (重力崩壊型) 超新星爆発を起こす。
- (2-a) 超新星爆発のあとに残される高密度天体の例を 2 つ挙げよ。
- (2-b) 誕生直後の宇宙にはほぼ水素やヘリウムしか存在していなかったと考えられているが、種族 I の恒星には様々な元素が含まれている。種族 I の恒星の豊富な金属量を実現するために超新星爆発が果たした役割を説明せよ。

第 2 問 問 1. (2) は次ページに続く。

(2-c) 望遠鏡による分光撮像観測では、既知のスペクトル線のドップラーシフトを測定することで、天球面上に投影された天体の空間分布に加えて、視線方向の運動を測定することができる。図 2-2 に示した、球殻状の超新星残骸の直径上に置いた点 A~G で、静止波長が 5007 Å である [OIII] 輝線スペクトルを観測することを考える。この超新星残骸が全く回転せず、等方的に膨張しているとき、観測された [OIII] 輝線スペクトルを並べて描いた図として最も適当なものを、理由を簡潔に記した上で、後の①~④のうちから一つ選べ。なお、選択肢①~④の横軸の単位はいずれも Å である。ただし、固有運動に伴う波長のズレは補正してあり、また星間吸収等の影響もないものとする。

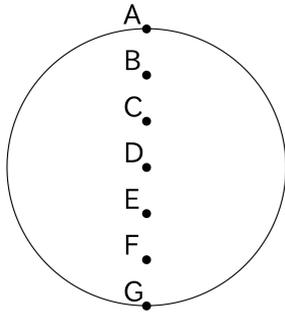
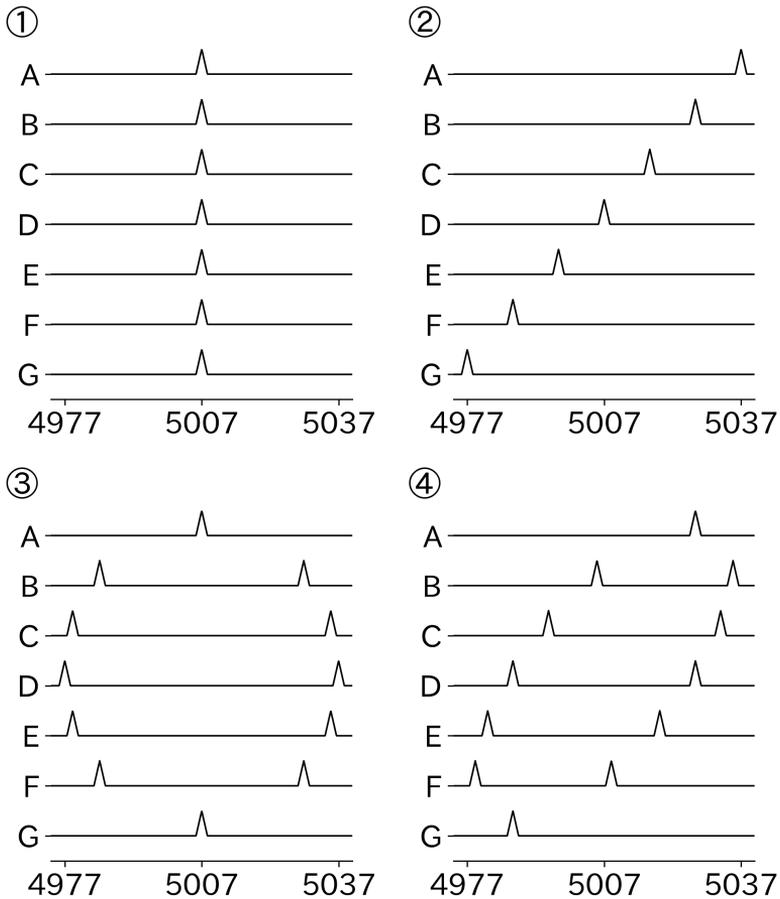


図 2-2: 模式的な超新星残骸



問 2. 点源爆発について、以下の問いに答えよ。解答は ρ と p をはっきりと区別して書くこと。

超新星爆発が起きた後、一様密度を持つ星間物質中を衝撃波が伝播していく問題を考える。衝撃波面の静止系で見たときの衝撃波上流の流体速度、質量密度、圧力を v_1, ρ_1, p_1 、衝撃波下流の流体速度、質量密度、圧力を v_2, ρ_2, p_2 とする ($v_1 > 0, v_2 > 0$)。強い衝撃波の極限では、次の Rankine – Hugoniot の式が成り立つ：

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2}{\gamma + 1}.$$

ここで、 γ は比熱比、 $M_1 = \frac{v_1}{c_1}$ は上流での衝撃波速度のマッハ数、 $c_1 = \left(\frac{\gamma p_1}{\rho_1}\right)^{1/2}$ は上流での音速である。

以下では、球対称の爆発を考える。時刻 $t = 0$ で爆発が起き、衝撃波面が星間空間に広がっていく。時刻 t での衝撃波面の位置を $R(t)$ 、衝撃波面の伝播速度を、時間微分を用いて $V_{sh} = \frac{dR}{dt}$ とする ($R(t=0) = 0$ とせよ)。また、星間物質は一様な密度 ρ_0 で星間空間において完全に静止しているものとする。衝撃波面内に含まれる物質はもとの星間物質のみを考え、超新星自体が放出した物質は無視できるものとする。さらに、衝撃波面の通過前後の物理量は、Rankine – Hugoniot の式を満たすとする。以上より、 $v_1 = V_{sh}, \rho_1 = \rho_0$ である。また、ここでは放射による冷却等は無視できるものとする。すなわち衝撃波面内に取り込まれたすべての星間物質の物理量は単一の密度、圧力、速度を持つ。

(1) 星間物質の密度は一様なので、総質量は体積に密度をかけて求められる。ある時刻 t までに衝撃波面内に取り込まれた星間物質の総質量 $M_{mat}(t)$ を、 R, ρ_0 を用いて表せ。

(2) 衝撃波面内に取り込まれた物質は衝撃波によって加熱されている。気体の単位質量あたりの内部エネルギーは $\epsilon_U = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$ で表されることを用いて、ある時刻 t での衝撃波面内の物質がもつ全内部エネルギー $U(t)$ を、 $\rho_0, R, p_2, \rho_2, \gamma$ を用いて表せ。さらに、Rankine – Hugoniot の式を用いて $U(t)$ から p_2, ρ_2 を消去し、 $\rho_0, R, V_{sh}, \gamma$ を用いて表せ。

(3) 衝撃波面内の物質が星間空間の静止系に対して膨張する速度 V_{mat} を、 V_{sh}, v_2 を用いて表せ。さらに、Rankine – Hugoniot の式を用いて V_{mat} から v_2 を消去し、 V_{sh}, γ を用いて表せ。

(4) ある時刻 t における衝撃波面内に含まれる物質の全運動エネルギー $K(t)$ を、 $\rho_0, R, V_{sh}, \gamma$ を用いて表し、 $K(t)$ と $U(t)$ が一致することを示せ。

(5) 冷却が無視できるという仮定により、内部エネルギーと運動エネルギーの和が保存され、それは爆発エネルギー E_0 と等しいことが従う。この事実から、 V_{sh} を、 ρ_0, E_0, R, γ を用いて表せ。

(6) $V_{sh} = \frac{dR}{dt}$ であることから、前問 (5) で求めた式は、 R に関する微分方程式である。定数 c と実数 $\alpha > 0$ を用いて、 $R(t) = ct^\alpha$ と書けるとして R を求め、 ρ_0, E_0, γ, t を用いて表せ。ただし、微分公式 $\frac{d}{dt}(ct^\alpha) = c\alpha t^{\alpha-1}$ を用いてもよい。

(7) 爆発エネルギー $E_0 = 10^{51}$ erg、星間空間の水素原子数密度 $n = 1 \text{ cm}^{-3}$ としたとき、 $t = 10^4 \text{ yr}$ での衝撃波の位置を、pc を単位として求めよ。関数電卓を用いてもよいが、10 倍程度の誤差は許容する。なお、星間物質は水素のみで構成されていると考え、比熱比は $\gamma = \frac{5}{3}$ とする。必要であれば、陽子質量 $m_p = 1.7 \times 10^{-24} \text{ g}$ 、 $1 \text{ pc} = 3.1 \times 10^{18} \text{ cm}$ を用いてもよい。

第3問.

恒星は星間物質が濃く集まった分子雲の中で形成される。分子雲内で最も大量に存在する分子である水素分子 (H_2) は対称的な分子構造を持つため、高温高密度などの限られた環境を除き、分子雲からの H_2 分子起源の輝線を観測することは難しい。そのため分子雲のガスを観測するために、分子雲の中で H_2 分子に次いで大量に存在する分子である一酸化炭素 (CO) 分子起源の輝線を用いることが多い。

問1. 図3-1は星間物質がとりうる温度と数密度の分布を示した図である。星間物質はその状態によって主に(あ)～(お)の5つに分類することが可能である。分子雲や宇宙の組成について、以下の問いに答えよ。

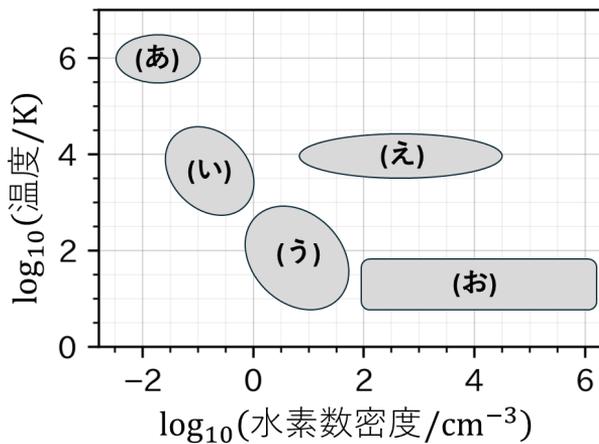


図3-1: 星間物質の温度と数密度の分布

- (1) (あ)～(お)の中から分子雲に該当するものを選び。
- (2) (あ)～(お)の中から、HII領域を主に構成する星間物質に該当するものを選び。また、HII領域とはどのような領域のことを指すか？成因に触れつつ、1行程度で簡潔に説明せよ。
- (3) 単独の水素原子は、地球上では自然には安定した状態ではほぼ存在しないものの、宇宙空間では安定的に存在している。この要因を1行程度で簡潔に述べよ。
- (4) 宇宙空間において、中性状態の水素原子が初めて安定的に存在するようになったのは宇宙誕生からどの程度たった頃か。水素原子が安定的に存在できるようになった要因と合わせて、2行程度で説明せよ。

問2. CO分子は結合軸に垂直な方向を軸として回転する。エネルギーはとびとびの値しか取れないため、回転状態の遷移(回転遷移)に伴い状態間のエネルギー差に応じて輝線が放出される。CO分子の回転遷移に伴う輝線について、以下の問いに答えよ。

- (1) 星形成領域や活動銀河核などで観測される、水素原子の出すバルマー系列の輝線は、CO分子の回転遷移に伴う輝線とは異なる放射メカニズムを持つ。バルマー系列の輝線の放射メカニズムを1行程度で簡潔に説明せよ。

(2) CO 分子の回転遷移に伴う輝線の波長を求めよう。CO 分子の回転に伴うエネルギーは前述の通りとびとびの値をとるが、この離散的なエネルギーは回転量子数 J を用いて表される。回転量子数 J の状態のエネルギー E_J は慣性モーメント I と角運動量 p_θ を用いて $E_J = \frac{p_\theta^2}{2I}$ と表される。

(2-a) 角運動量 p_θ は、プランク定数 h を用いて

$$p_\theta = \frac{h}{2\pi} \sqrt{J(J+1)}$$

と表される。回転量子数 J のエネルギー準位 E_J を I, J を用いて表せ。

(2-b) CO 分子の慣性モーメント I は、C 原子の質量 m_C 、O 原子の質量 m_O 、および CO 分子における原子間距離 r を用いて、

$$I = \frac{m_C m_O}{m_C + m_O} r^2$$

と書ける。CO 分子の慣性モーメント I を SI 単位系を用いて有効数字 3 桁で求めよ。ただし、 $m_C = 1.993 \times 10^{-26}$ kg, $m_O = 2.657 \times 10^{-26}$ kg, $r = 1.128 \text{ \AA}$ とする。

(2-c) $J = 1$ から $J = 0$ に遷移するとき解放されるエネルギー、すなわち $J = 1$ と $J = 0$ でのエネルギー準位の差 ΔE を SI 単位系を用いて有効数字 3 桁で求めよ。ただし、 $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s, $\pi = 3.142$ とする。

(2-d) ΔE を持つ光子の波長を考えることで、 $J = 1$ から $J = 0$ に遷移するとき放出される輝線 (以下 CO (1-0) 輝線とする) の波長を有効数字 3 桁で求めよ。ただし振動数 ν [Hz] の光子の持つエネルギー E [J] は $E = h\nu$ と表される。ただし $c = 2.998 \times 10^8$ m s⁻¹ を用いよ。また、この波長の電磁波を観測可能な望遠鏡を以下の①~④より選択せよ。ただし赤方偏移の影響は考えないものとする。

①



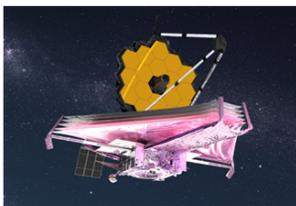
クレジット：国立天文台

②



クレジット：国立天文台

③



クレジット：NASA GSFC/CIL/Adriana Manrique Gutierrez

④



クレジット：NASA/CXC/SAO

(3) CO(1-0) 輝線を観測することで、天体の中のガスの質量を推定することが可能である。CO(1-0) 輝線の光度を L_{CO} [$\text{K km s}^{-1} \text{ pc}^2$] とおくと、変換係数 X_{CO} [$M_{\odot} (\text{K km s}^{-1} \text{ pc}^2)^{-1}$] を用いて、分子ガスの質量 $M_{\text{mol}}[M_{\odot}]$ は $M_{\text{mol}} = X_{\text{CO}} \times L_{\text{CO}(1-0)}$ と求められる。

(3-a) 銀河 G の CO(1-0) 輝線を観測したところ、中心周波数 107.7 GHz で観測された。銀河 G の赤方偏移 z と銀河 G までの距離を有効数字 2 桁で求めよ。ただしハッブル定数は $H = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ とし、宇宙論的効果は十分小さいものとする。

(3-b) CO(1-0) 輝線の光度 L_{CO} は、CO(1-0) 輝線のフラックス $F_{\text{CO}}[\text{Jy km s}^{-1}]$ 、天体までの距離 $D[\text{Mpc}]$ 、実験室系での周波数 $\nu_{\text{rest}}[\text{GHz}]$ を用いて、

$$\left(\frac{L_{\text{CO}}}{\text{K km s}^{-1} \text{ pc}^2} \right) = 3.25 \times 10^7 \left(\frac{F_{\text{CO}}}{\text{Jy km s}^{-1}} \right) \left(\frac{D}{\text{Mpc}} \right)^2 \left(\frac{\nu_{\text{rest}}}{\text{GHz}} \right)^{-2} (1+z)^{-1}$$

とかける。銀河 G の CO(1-0) 輝線のフラックスが $F_{\text{CO}} = 2.0 \times 10 \text{ Jy km s}^{-1}$ であるとき、 L_{CO} を $\text{K km s}^{-1} \text{ pc}^2$ を単位として、有効数字 2 桁で求めよ。

※ $\text{Jy} = 10^{-26} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1}$ である。

(3-c) 近傍銀河の観測などから、 $X_{\text{CO}} = 0.8 M_{\odot} (\text{K km s}^{-1} \text{ pc}^2)^{-1}$ であると考えられている。これを用いて、銀河 G の分子ガス質量 M_{mol} を M_{\odot} を単位として有効数字 1 桁で求めよ。

(3-d) 別波長帯での銀河 G の観測より、銀河 G では 1 年あたりに $1 \times 10^2 M_{\odot}$ の恒星が作られていることがわかった。銀河 G がこのペースで分子ガスを恒星に変換するとき、銀河 G 内の分子ガスをすべて消費するのに必要な時間を年単位で有効数字 1 桁で求めよ。ただし、銀河 G 内では星形成以外の要因で分子ガス質量が増加・減少することはないとする。

計 算 用 紙

(切り離さずに用いよ.)



Japan Astronomy Olympiad