第 4 回日本天文学オリンピック 本選
理論試験 解答例

日本天文学オリンピック委員会

第 1 問

問 1

(1)

(a) $m_\mathrm{e}\dfrac{v^2}{r} = k_0\dfrac{Ze^2}{r^2}$

(b) (a) より,

$$v = \sqrt{\frac{k_0}{m_\mathrm{e}}\frac{Ze^2}{r}}$$

ド・ブロイの量子条件に代入して,

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{1}{2\pi}\frac{nh}{m_\mathrm{e}v} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{nh}{m_\mathrm{e}}\sqrt{\frac{m_\mathrm{e}}{k_0}\frac{r_n}{Ze^2}} \end{aligned}$$

整理して,

$$r_n = \frac{n^2h^2}{4\pi^2k_0}\frac{1}{Zm_\mathrm{e}e^2}$$

(c)

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{2}m_\mathrm{e}v^2 - \frac{k_0Ze^2}{r_n} \\ &= -\frac{k_0Ze^2}{2r_n} \\ &= -\frac{2k_0^2\pi^2Z^2m_\mathrm{e}e^4}{n^2h^2} \end{aligned}$$

(d) $\dfrac{hc}{\lambda} = E_n - E_l$ より,

$$R_Z = \frac{2k_0^2\pi^2Z^2m_\mathrm{e}e^4}{n^2h^2}$$

(2) $Z = 2$ である He 原子から発せられるスペクトル線。

問 2

(1)

$$M_{\oplus} a \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = G\frac{M_{\odot} M_{\oplus}}{a^2}$$

より,

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_{\odot}}}$$

(2)

$$L_1 : -G\frac{mM_{\odot}}{(1-x_1)^2 a^2} + G\frac{mM_{\oplus}}{x_1^2 a^2} + m(1-x_1)\frac{GM_{\odot}}{a^2} = 0$$
$$L_2 : -G\frac{mM_{\odot}}{(1+x_2)^2 a^2} - G\frac{mM_{\oplus}}{x_2^2 a^2} + m(1+x_2)\frac{GM_{\odot}}{a^2} = 0$$

(3) L_1 での力のつり合いの式の第 1 項について, x_1 を微小量とした近似をして,

$$-G\frac{mM_{\odot}}{a^2}(1+2x_1) + \frac{GmM_{\oplus}}{x_1^2 a^2} + m(1-x_1)\frac{GM_{\odot}}{a^2} = 0$$

これを整理し,

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{M_{\oplus}}{3M_{\odot}}} = 1\times 10^{-2}$$

となる。L_2 についても同様にすると,

$$x_2 = \sqrt[3]{\frac{M_{\oplus}}{3M_{\odot}}} = 1\times 10^{-2}$$

となる。

(4) 放射源となる太陽と地球が, JWST から見て常に同方向に位置するため, L_2 が放射の遮断を最も効率的に行うことができる。

(5) L_1, L_2 はともにポテンシャルの極大点である, 不安定点であるから。

問 3

(1) 恒星を分光観測し, 各元素固有の吸収線の強度から組成を特定する。

(2) 散開星団は, 種族 I と呼ばれる, 金属を多く含む若い恒星が数十〜数千個程度で銀河円盤内に不規則に分布したものである。一方, 球状星団は, 10 万個以上の, 古く低金属な種族 II の恒星が球状に密集したものであり, ハローに分布する。

(3) この星団を構成する恒星が一斉に誕生したと仮定したとき, 主系列星から離れ始めている恒星の寿命がこの星団の年齢と等しい。

問 4

(1) 大気中の乱流により生じる光の波面の歪みをリアルタイムで測定・補正し, 望遠鏡の観測精度を飛躍的に向上させる技術のこと。

(2) 星間赤化は, 宇宙空間の星間塵が, 波長の短い青色光を散乱・吸収することにより, 恒星光が赤くなること。

(3) 地球の公転運動により, 遠方天体からの光が観測者には実際の位置とは異なる方向から到来するように見え, そのずれのことを年周光行差と呼ぶ。

(4) 宇宙誕生から約 38 万年後に, 宇宙の温度低下により電子と陽子が結合することで光が直進できるようになったイベントのこと。

第 2 問

(1)

(a)

$$v = \frac{2\pi r}{P} = \frac{2 \times 3.1 \times 7.8 \times 10^8\,\mathrm{m}}{3.7 \times 10^8\,\mathrm{s}} \simeq 13\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

(b)

$$\frac{a_{\mathrm{Peg}}}{a_{\mathrm{J}}} = \left(\frac{P_{\mathrm{Peg}}}{P_{\mathrm{J}}}\right)^{2/3} \simeq 10^{-2}$$

である。また,

$$v = \frac{2\pi r}{P} = \frac{2\pi}{P}\frac{m}{M+m}a \simeq \frac{2\pi}{P}\frac{m}{M}a \simeq$$

より,

$$m = \frac{M}{2\pi}\frac{Pv}{a}$$

となる。よって,

$$\frac{m_{\mathrm{Peg}}}{m_{\mathrm{J}}} = \frac{P_{\mathrm{Peg}}}{P_{\mathrm{J}}}\frac{v_{\mathrm{Peg}}}{v_{\mathrm{J}}}\left(\frac{a_{\mathrm{Peg}}}{a_{\mathrm{J}}}\right)^{-1} \simeq 0.43$$

(2)

(a) 最小: 0.5, 最大: 0, 1

(b)

$$\frac{1}{\pi} \times 56\,\mathrm{m\,s^{-1}} \times 3.7 \times 10^5\,\mathrm{s} \simeq 6.6 \times 10^3\,\mathrm{km}$$

(3) 半径の振幅は,

$$\Delta R = \frac{AT}{2\pi}$$

である。$\Delta R \leq R$ なる範囲を描画すればよいため,

$$AT \leq \frac{\pi}{2} \times 7.0 \times 10^8\,\mathrm{m}$$

を, 両対数グラフに描画すればよい。後の図から分かる通り, Peg 51 がセファイドである可能性を棄却できない。

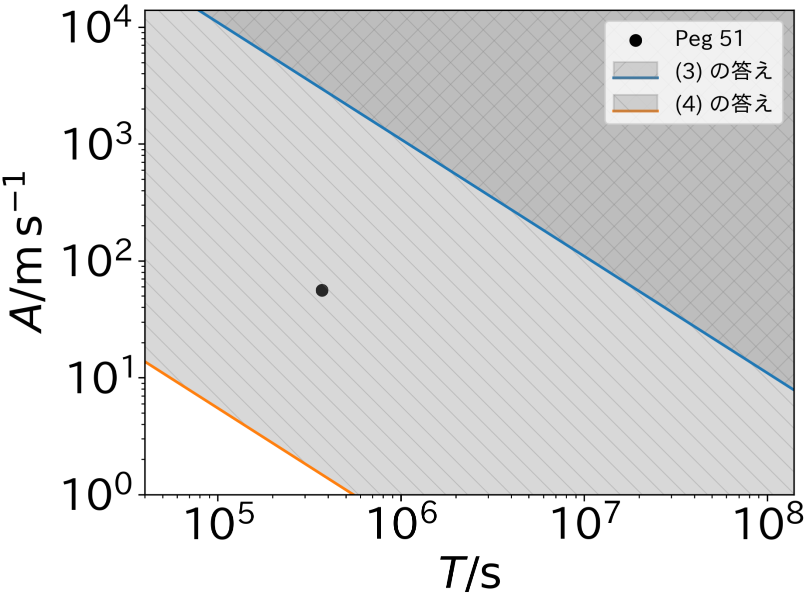
(4)　明るさは R^2 に比例するので, $\Delta R = \dfrac{AT}{2\pi}$ に対して

$$\left(1 + \frac{\Delta R}{R}\right)^2 \leq 1.001$$

すなわち, $\Delta R/R$ が十分小さいとして近似を行い,

$$\Delta R \leq 0.0005R$$

を満たすような範囲を描画すればよい。後の図から分かる通り, Peg 51 がセファイドである可能性を棄却できる。



(5)　(解答の一例) (1) において, 惑星の公転軌道面は視線方向に平行であると仮定したが, ここでは平行ではないと仮定する。すると, 実際の惑星の公転速度は, 今回求められた公転速度よりも大きくなる。そのため, (3) や (4) で求める, 惑星がセファイドである可能性を棄却できる領域が右上にシフトし, より狭くなる。

1　第 3 問

問 1

(1)

(a)　$5 \times 10^2\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$

(b)　宇宙が一点から膨張を始めてから, すべての銀河が現在と同じ速度で太陽系から遠ざかっていると仮定する。このとき, 任意の銀河までの距離を後退速度で割ることで求まる時間, すなわちハッブル定数の逆数だけ時間を遡ると, 太陽系と銀河までの距離がゼロになる, すなわち, 宇宙が一点となる。すなわち, ハッブル定数の逆数を宇宙年

齢とすることができ, 具体的な値は,

$$\begin{aligned}\frac{1}{H_0} &= \frac{1}{5\times 10^2\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}} \\ &= \frac{1}{5\times 10^2\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}} \times \frac{1\,\mathrm{yr}}{3.1\times 10^7\,\mathrm{s}} \times \frac{3.1\times 10^{19}\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{Mpc}} \\ &= 2\times 10^9\,\mathrm{yr}\end{aligned}$$

である。

(2) 宇宙空間を距離 r 進んだ, ある光の波長を $\lambda(r)$ とする。このとき, $E = \dfrac{hc}{\lambda}$ より,

$$\frac{\lambda(r)}{\lambda(0)} = e^{kr}$$

が成り立つ。両辺対数を取り, 変形することで,

$$\begin{aligned}kr &= \ln\frac{\lambda(r)}{\lambda(0)} \\ &= \ln(1+z) \\ &\simeq z\end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}k &= \frac{z}{r} \\ &= \frac{H_0}{c} \\ &= \frac{500\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}}{3\times 10^5\,\mathrm{km\,s^{-1}}} \\ &= 1.7\times 10^{-3}\,\mathrm{Mpc^{-1}}\end{aligned}$$

となる。

問 2

(1)

(a) 光度 L の天体から距離 d_1, d_2 の地点で, フラックスはそれぞれ, $f_1 = \dfrac{L}{4\pi d_1^2}, f_2 = \dfrac{L}{4\pi d_2^2}$ である。ここで, 天体を見込む立体角をそれぞれ Ω_1, Ω_2 とすると, 天体の半径を r として, $\Omega_1 = \dfrac{\pi r^2}{4\pi d_1^2}, \Omega_2 = \dfrac{\pi r^2}{4\pi d_2^2}$ である。よって, この天体の面輝度はそれぞれ, $S_1 = \dfrac{f_1}{\Omega_1} = \dfrac{L}{\pi r^2}, S_2 = \dfrac{f_2}{\Omega_2} = \dfrac{L}{\pi r^2}$ となり, 距離に依存しない。

(b) 問 1 (2) より, 疲れた光仮説のもとでは, 光の振動数が $1+z$ に反比例するため, 観測者が受ける光子 1 個あたりのエネルギーも $1+z$ に反比例し, 面輝度も $1+z$ に反比例する。

(2)

(a) 赤方偏移により光の波長が $1+z$ 倍に伸びることで, 光子のエネルギーは $1+z$ に反比例する。また, 宇宙膨張の効果により時間間隔が $1+z$ 倍に伸びるため, 単位時間

あたりに受けるエネルギー量は $1+z$ に反比例する。よって, 観測者が受けるエネルギーフラックスは $f=\dfrac{L}{4\pi D^2(1+z)^2}$ となる。

(b) 銀河を見込む立体角 Ω は, θ^2 に比例するため, $\Omega \propto (1+z)^2$ である。よって, 銀河の面輝度 $S=\dfrac{f}{\Omega}$ は, $(1+z)^4$ に反比例する。

(3) 膨張宇宙説, 疲れた光仮説それぞれを仮定することで, $z \simeq 0.4$ の銀河の面輝度を, $z \simeq 0$ における面輝度に補正する。まず, 膨張宇宙説のもとでは面輝度は $(1+z)^{-4}$ に比例するため,

$$20.5-\frac{5}{2}\log(1.4)^4 \simeq 19.04$$

より, およそ 19.0 等となる。次に疲れた光仮説のもとでは面輝度は $(1+z)^{-1}$ に比例するため,

$$20.5-\frac{5}{2}\log 1.4 \simeq 20.13$$

より, およそ 20.1 等となる。よって, 膨張宇宙説を支持するのが適切である。

第 4 問

問 1

恒星誕生時に $8\,M_\odot$ 以上の質量を持つ恒星は, 中心部で水素の核融合反応が進行し, He の中心核が形成されると, 水素の核融合を起こす領域を外側へと広げていく。これに伴い恒星が膨張して赤色巨星となり, 中心部では He の核融合や, C, O などさらに想い元素の核融合を通じ, やがて Fe の角が形成されると, これ以上核融合を起こさなくなる。自己重力と釣り合うほどの内圧を維持できなくなると, 重力崩壊を起こし超新星爆発を起こす。中心核はつぶれて中性子星などとして残ることとなる。誕生時の主系列星としての質量がさらに重い場合には, 中性子星の質量が十分重くなり崩壊し, 恒星質量程度のブラックホールが作られる。

問 2

$$M_{\mathrm{BH}}=\left(\frac{1\times10^3\,\mathrm{au}}{1\,\mathrm{au}}\right)^3\left(\frac{16\,\mathrm{yr}}{1\,\mathrm{yr}}\right)^{-2}M_\odot \simeq 4\times10^6\,M_\odot$$

問 3

(1)

(a)

$$d_{\mathrm{BLR}}=c\tau=3.00\times10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}\times(50\times24\times60\times60)\,\mathrm{s}\simeq 1\times10^{15}\,\mathrm{m}$$

(b) SMBH の質量を M とおくと, 万有引力と遠心力のつり合いより,

$$G\frac{mM}{d_{\mathrm{BLR}}^2}=m\frac{v^2}{d_{\mathrm{BLR}}}$$

これを整理・代入し,

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{d_{\mathrm{BLR}} v^2}{G} \\
&= \frac{1.3 \times 10^{15}\,\mathrm{m} \times (2 \times 10^3 \times 10^3)\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}} \\
&= 4 \times 10^7\,M_\odot
\end{aligned}
$$

(2)

(a) C を定数として $L_{\mathrm{cont}} = C d_{\mathrm{BLR}}^2$ とおくと,

$$
\log L_{\mathrm{cont}} = \log C + 2 \log d_{\mathrm{BLR}}
$$

$m \propto d_{\mathrm{BLR}} v^2$ より,

$$
\begin{aligned}
\log M_{\mathrm{BH}} &= \log d_{\mathrm{BLR}} + 2 \log v + \text{定数} \\
&= \frac{1}{2} \log L_{\mathrm{cont}} + 2 \log v + \text{定数}
\end{aligned}
$$

よって, $\alpha = 0.5, \beta = 2$

(b)

$$
\log(4.0 \times 10^8) = 0.5 \log(7.8 \times 10^{11}) + 2 \log(3.1 \times 10^3) + \gamma
$$

より, $\gamma \simeq -4.3$

(c) $\log\left(\dfrac{M_{\mathrm{BH}}}{M_\odot}\right) = 0.5 \log\left(8.3 \times 10^{10}\right) + 2 \log\left(1.3 \times 10^3\right) - 4.3 \simeq 7.36$ より, $M_{\mathrm{BH}} \simeq 2 \times 10^7\,M_\odot$

問 4

(1) ア: $\dfrac{L}{4\pi r^2}$, イ: $\dfrac{\sigma_{\mathrm{T}}}{4\pi c r^2}$, ウ: $\dfrac{G m_{\mathrm{p}} M}{r^2}$, エ: $\leq$, オ: $\dfrac{4\pi G c m_{\mathrm{p}}}{\sigma_{\mathrm{T}}} M$

(2)

$$
L_{\mathrm{Edd}} = \eta \Delta M_{\mathrm{Edd}} c^2 = \frac{4\pi G c m_{\mathrm{p}} M}{\sigma_{\mathrm{T}}}
$$

よって,

$$
M_{\mathrm{Edd}} = \frac{4\pi G c m_{\mathrm{p}}}{\eta c \sigma_{\mathrm{T}}} M
$$

値を代入して,

$$
M_{\mathrm{Edd}} \simeq 2\,M_\odot/\mathrm{yr}
$$

(3) 与えられた微分方程式を解き, $t = 0$ での M_{BH} を M_0 とおけば,

$$
M_{\mathrm{BH}}(t) = M_0 \exp\left(\frac{(1-\eta) 4\pi G m_{\mathrm{p}}}{\eta c \sigma_{\mathrm{T}}} t\right)
$$

よって,

$$
t_{10} = \ln 10 \times \left(\frac{(1-\eta) 4\pi G m_{\mathrm{p}}}{\eta c \sigma_{\mathrm{T}}}\right)^{-1} \simeq 1 \times 10^8\,\mathrm{yr}
$$

(4) $\log(\mathrm{Age})$ は, $z = 9, 30$ でそれぞれ $-0.3, -1.0$ であるので,

$$
M_{\mathrm{BH}}(z = 30) = 10^8 \times 10^{-\frac{10^{-0.3} - 10^{-1.0}}{1.15 \times 10^8 \times 10^4}} = 3 \times 10^4\,M_\odot
$$